Given that we know: $E\left[aX+b\right]=aE\left[x\right]+b$.

Prove: $Var\left[aX+b\right]=a^2Var\left[x\right]$

By definition, $Var\left[x\right]=E\left[x^2\right]-\left(E\left[X\right]\right)^2$, so $Var\left[aX+b\right]=E\left[\left(aX+b\right)^2\right]-\left(E\left[aX+b\right]\right)^2$

$Var\left[ax+b\right]$

$=E\left[\left(aX+b\right)^2\right]-\left(E\left[aX+b\right]\right)^2$

$=E\left[a^2X^2+2abX+b^2\right]-\left(aE\left[X\right]+b\right)^2$

$=E\left[a^2X^2\right]+E\left[2abX\right]+E\left[b^2\right]-\left(a^2\left(E\left[X\right]\right)^2+2abE\left[x\right]+b^2\right)$

$=a^2E\left[X^2\right]+2abE\left[X\right]+E\left[b^2\right]-a^2\left(E\left[X\right]\right)^2-2abE\left[x\right]-b^2$

$=a^2E\left[X^2\right]+2abE\left[X\right]+b^2-a^2\left(E\left[X\right]\right)^2-2abE\left[x\right]-b^2$

$=a^2E\left[X^2\right]-a^2\left(E\left[X\right]\right)^2$

$=a^2\left(E\left[X^2\right]-\left(E\left[X\right]\right)^2\right)$

$=a^2Var\left[X\right]$

Given that we know: $E\left[aX+b\right]=aE\left[x\right]+b$.

Prove: $Var\left[aX+b\right]=a^2Var\left[x\right]$

By definition, $Var\left[x\right]=E\left[x^2\right]-\left(E\left[X\right]\right)^2$, so $Var\left[aX+b\right]=E\left[\left(aX+b\right)^2\right]-\left(E\left[aX+b\right]\right)^2$

$Var\left[ax+b\right]$

$=E\left[\left(aX+b\right)^2\right]-\left(E\left[aX+b\right]\right)^2$

$=E\left[a^2X^2+2abX+b^2\right]-\left(aE\left[X\right]+b\right)^2$

$=E\left[a^2X^2\right]+E\left[2abX\right]+E\left[b^2\right]-\left(a^2\left(E\left[X\right]\right)^2+2abE\left[x\right]+b^2\right)$

$=a^2E\left[X^2\right]+2abE\left[X\right]+E\left[b^2\right]-a^2\left(E\left[X\right]\right)^2-2abE\left[x\right]-b^2$

$=a^2E\left[X^2\right]+2abE\left[X\right]+b^2-a^2\left(E\left[X\right]\right)^2-2abE\left[x\right]-b^2$

$=a^2E\left[X^2\right]-a^2\left(E\left[X\right]\right)^2$

$=a^2\left(E\left[X^2\right]-\left(E\left[X\right]\right)^2\right)$

$=a^2Var\left[X\right]$